# 1

# Mathematische Grundlagen

Der Begriff der Menge ist einer der grundlegenden Begriffe in der Mathematik. Mengen dienen dazu, Dinge oder Objekte zu einer Einheit zusammenzufassen. In diesem Kapitel wird der Mengenbegriff eingeführt und es werden Beziehungen zwischen Mengen und Operationen auf Mengen definiert und erläutert. Darauf aufbauend werden die Konzepte Relation und Funktion als Beschreibungsmittel von Beziehungen zwischen Objekten vorgestellt.

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollen Sie

- ein grundlegendes Verständnis von Mengen sowie von Operationen auf Mengen haben,
- den Unterschied zwischen Relationen und Funktionen verstehen und
- diese Konzepte zur Beschreibung bestimmter Aufgabenstellungen anwenden können.

## 1.1 Mengen

Die Festlegung des Begriffs der Menge ist die Grundlage für die Definition der später behandelten Konzepte Relation und Funktion. In diesem Abschnitt werden Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen, Beziehungen zwischen Mengen und Operationen auf Mengen eingeführt.

### 1.1.1 Definition und Beschreibung von Mengen

G. Cantor (1845-1915), der Begründer der Mengenlehre, definierte den Begriff der Menge wie folgt:

**Definition 1.1: Menge**
Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Nach dieser Definition beschreibt man eine Menge durch die Angabe der Elemente, aus denen sie besteht. Dadurch entsteht ein neues Ganzes, ein neues Objekt, für welches ein Name vergeben werden kann.

**Beispiel 1.1**
In diesem Beispiel werden zwei Mengen $M_1$ und $M_2$ auf unterschiedliche Arten angegeben:

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$M_2 = \{x \mid x \text{ ist eine gerade ganze Zahl zwischen 1 und 11}\}$$

Eine Menge wird festgelegt durch die Angabe eines Namens, auch Bezeichner genannt, links des Gleichheitszeichens, z. B. $M_1$ aus Beispiel 1.1. Die Elemente werden rechts vom Gleichheitszeichen zwischen den *Mengenklammern* $\{$ und $\}$ angegeben. Für die Angabe der Elemente gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten: Entweder werden sie *aufzählend* angegeben, d. h. durch Auflistung aller Elemente wie bei $M_1$, oder *beschreibend*, d. h. durch die Vorgabe von Eigenschaften der Elemente wie bei $M_2$. Die allgemeine Form dieser zweiten Beschreibung ist $\{x \mid P(X)\}$, wobei $P$ ein Prädikat ist (s. Kapitel 2), das für die Elemente der Menge erfüllt sein muss.

**Aufgabe 1.1**
Sind die beiden Mengen $M_1$ und $M_2$ aus dem Beispiel 1.1 identisch?

Die aufzählende Beschreibungsmöglichkeit ist im Prinzip nur für endliche Mengen anwendbar. Aus Gründen der leichteren Verständlichkeit wird diese Beschreibung manchmal auch für unendliche oder große endliche Mengen verwendet, vorausgesetzt die beschriebene Menge wird durch eine endliche Auflistung von Elementen offensichtlich. Die restlichen Elemente werden durch Punkte $(\ldots)$ angedeutet.

**Beispiel 1.2**
An dieser Stelle werden zwei unendliche Zahlenmengen $M_3$ und $M_4$ sowie eine endliche Zahlenmenge $M_5$ unter Zuhilfenahme von Punkten $(\ldots)$ angegeben.

$$M_3 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$
$$M_4 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$$
$$M_5 = \{1, 2, \ldots, 1000\}$$

**Aufgabe 1.2**
1. Versuchen Sie in eigenen Worten zu beschreiben, welche Elemente die Mengen $M_3$, $M_4$ und $M_5$ aus dem Beispiel 1.2 beinhalten.

2. Versuchen Sie, die Mengen $M_3$, $M_4$ und $M_5$ mittels eines Prädikates zu beschreiben, vgl. $M_2$ aus Beispiel 1.1.
3. Warum ist bei der Menge $M_6 = \{3, 5, 7, \ldots\}$ nicht erkennbar, was die Menge abbildet? Versuchen Sie, zwei verschiedene Weiterführungen dieser Menge zu finden.

In den Beispielen 1.1 und 1.2 bestehen die Mengen jeweils aus Zahlen, jedoch können Mengen auch beliebige Objekte beinhalten, selbst andere Mengen.

**Beispiel 1.3**
Dieses Beispiel zeigt Mengen, die keine Zahlen beinhalten. Auch hier können beide Varianten zum Angeben der Elemente genutzt werden.

$$\begin{aligned} \text{Finger} &= \{\text{Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger, Ringfinger,} \\ &\quad\ \text{kleiner Finger}\} \\ M_7 &= \{\text{a, aa, aaa, aaaa}, \ldots\} \\ \text{Fernstudierende} &= \{x \mid x \text{ ist Teilnehmer*in am Fernstudium Informatik}\} \end{aligned}$$

Eine wesentliche Anforderung an die Elemente einer Menge ist, dass sie voneinander unterscheidbar sein müssen. Somit handelt es sich bei

$$\text{keine\_Menge} = \{5, 6, 7, 5\}$$

um keine Menge, da darin ein Element mehrfach vorkommt.

**Definition 1.2: Element, $\in$**
Sei $M$ eine beliebe Menge und $a, b$ beliebige Objekte. Falls $a$ ein Element von $M$ ist, wird dies mit $a \in M$ notiert. Ist $a$ jedoch kein Element von $M$, so wird dies mit $a \notin M$ notiert. Anstatt $a \in M$ und $b \in M$ kann auch $a, b \in M$ geschrieben werden.

**Aufgabe 1.3**
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

1. $a \in \{a, b, c, d\}$
2. $a, e \in \{a, b, c, d\}$
3. $1 \notin \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$
4. $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$
5. $\{1\} \in \{\{1, 2, 3, 4\}\}$
6. $\{1\} \in \{\{1\}, 2, 3, 4\}$

**Definition 1.3: Kardinalität**
Sei $M$ eine endliche Menge. Dann bezeichnet die Kardinalität die Anzahl der Elemente von $M$ und wird als $|M|$ notiert.

Hinweis: Manchmal wird die Kardinalität auch mit einer Raute notiert: $\#M$

Eine Reihe von Mengen wird so häufig genutzt, dass dafür feste Bezeichner verwendet werden. Dazu gehören die folgenden Mengen:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $= \{1, 2, 3, \ldots\}$ | natürliche Zahlen |
| $\mathbb{N}_0$ | $= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ | natürliche Zahlen mit 0 |
| $\mathbb{N}_k$ | $= \{k, k+1, k+2, \ldots\}$ | natürliche Zahlen ab k |
| $\mathbb{Z}$ | $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ | ganze Zahlen |
| $\mathbb{Q}$ | $= \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ | rationale Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | | reelle Zahlen |
| $\mathbb{C}$ | $= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ | komplexe Zahlen |

Eine weitere Menge von besonderer Bedeutung ist die sogenannte leere Menge.

**Definition 1.4: Leere Menge**
Die leere Menge beinhaltet keine Elemente und wird einheitlich mit $\emptyset$ oder mit $\{\}$ notiert.

**Beispiel 1.4**
Die leere Menge tritt häufiger auf, wenn Lösungsmengen von Gleichungen beschrieben werden. So hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in den reellen Zahlen. Deshalb gilt für die Lösungsmenge $L$ der Gleichung

$$L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

**Aufgabe 1.4: Abschließende Aufgaben zur Mengendefinition**
1. Welche Eigenschaften charakterisieren eine Menge?
2. Wie kann man die Zahlenmenge $\mathbb{N}_k$ in beschreibender Form angeben?
3. Welche Elemente umfasst die Menge
   $T_{24} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ teilt die natürliche Zahl } 24\}$?

4. Versuchen Sie die folgende Frage zu beantworten: Kann eine Menge sich auch selbst beinhalten? Schlagen Sie dazu ggf. den Begriff „Russellsche Antinomie“ nach z. B. in [13] (Literaturverzeichnis).

### 1.1.2 Mengen und ihre Teilmengen

In Beispiel 1.4 ist bereits eine Beziehung zwischen zwei Mengen vorhanden, nämlich zwischen der Lösungsmenge $L$ und der leeren Menge: die Menge $L$ und die leere Menge sind gleich, da sie dieselben Elemente enthalten.
Eine weitere wichtige Beziehung zwischen zwei Mengen ist die Teilmengenbeziehung, die auch als Mengeninklusion bezeichnet wird.

**Definition 1.5: Teilmenge**
Eine Menge $A$ ist eine Teilmenge der Menge $B$, wenn alle Elemente von $A$ auch Elemente von $B$ sind. Dies wird als $A \subseteq B$ geschrieben.

Die leere Menge ist dabei Teilmenge jeder Menge, d. h. es gilt immer $\emptyset \subseteq M$ für jede beliebige Menge $M$. Dies gilt auch, wenn $M$ selbst die leere Menge ist. Ebenfalls ist jede Menge eine Teilmenge von sich selbst, es gilt also $M \subseteq M$ für jede beliebige Menge $M$.

**Beispiel 1.5**
Die folgenden Aussagen sind alle korrekt.

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq \{a, b, c\} \\ \{1, 2, 3\} &\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ \mathbb{N} &\subseteq \mathbb{N}_0 \\ \{a, b, c\} &\subseteq \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Der vierte Fall aus Beispiel 1.5 stellt eine Besonderheit dar, da hier beide Mengen identisch sind. Um solche Fälle auszuschließen, gibt es den Begriff der echten Teilmenge.

**Definition 1.6: Echte Teilmenge**
Eine Menge $A$ ist eine echte Teilmenge der Menge $B$, wenn alle Elemente von $A$ auch Elemente von $B$ sind und $B$ mindestens ein Element enthält, welches nicht in $A$ vorkommt. Dies wird als $A \subset B$ geschrieben.

**Aufgabe 1.5**
Sind die folgenden Aussagen korrekt? Falls nein, geben Sie einen Grund dafür an. Achten Sie auf den Unterschied zwischen Teilmenge und echter Teilmenge.

1. $\{a\} \subseteq \{a\}$
2. $\{a\} \subset \{a\}$
3. $\mathbb{Q} \subset \{\mathbb{R}\}$
4. $\{1, 2, 3\} \subset \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl und } x \leq 42\}$
5. $\{1, 2, \pi\} \subseteq \mathbb{Z}$
6. $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$

Über den Begriff der Teilmenge kann nun auch die Gleichheit von Mengen definiert werden.

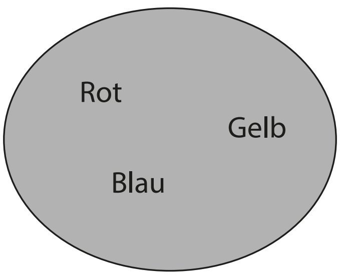
**Definition 1.7: Gleichheit von Mengen**
Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Dann gilt:

$$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

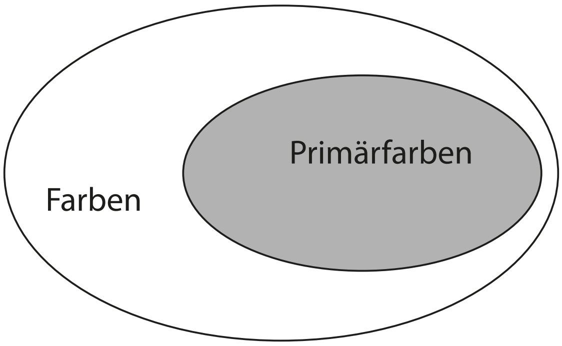
Somit gilt, dass die beiden Mengen aus Beispiel 1.1 gleich sind, da sowohl $M_1 \subseteq M2$ als auch $M_2 \subseteq M_1$ gilt.
Aus der Definition der Gleichheit wird auch ersichtlich, dass Mengen unabhängig von der Aufzählungsreihenfolge ihrer Elemente sind. So bezeichnen die folgenden Aufzählungen alle die gleiche Menge:

**Beispiel 1.6**
Primärfarben = {Rot, Gelb, Blau} = {Rot, Blau, Gelb} = {Gelb, Rot, Blau}

Eine Möglichkeit zur grafischen Darstellung von Mengen und deren Beziehungen untereinander bieten *Mengendiagramme*, auch *Venn-Diagramme* genannt. Dabei wird jede Menge durch eine ovale Figur dargestellt. In diese Figur werden entweder die Elemente eingetragen oder sie wird mit dem Namen der dargestellten Menge beschriftet.
Die Menge der Primärfarben aus dem Beispiel 1.6 lässt sich also durch folgende Figur darstellen:



Eine Teilmengenbeziehung zwischen zwei Mengen kann nun durch zwei ineinander enthaltene Figuren dargestellt werden:




Eine Teilmenge einer Menge $M$ beschreibt in gewissem Sinn eine Auswahl von Elementen aus den Elementen von $M$. Die Menge aller Teilmengen einer Menge wird als *Potenzmenge* bezeichnet.

**Definition 1.8: Potenzmenge**
Sei $M$ eine beliebige Menge. Dann bezeichnet $P(M)$ mit

$$P(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$$

die Potenzmenge der Menge $M$.

Die Potenzmenge wird in dem folgenden Beispiel verdeutlicht:

**Beispiel 1.7**
Sei $M = \{1, 2, 3\}$, dann ist

$$\begin{aligned} P(M) = \quad & \{\emptyset && \text{0-elementige Teilmengen} \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, && \text{1-elementige Teilmengen} \\ & \{1,3\}, \{1,2\}, \{3,2\}, && \text{2-elementige Teilmengen} \\ & \{1,2,3\}\} && \text{3-elementige Teilmengen} \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.6**
1. Wie lautet die Potenzmenge zur Menge $M = \{a, b, 1, 7\}$
2. Die Menge der Mischfarben entsteht aus der Menge der Primärfarben, indem man von jeder Primärfarbe höchstens einen Anteil nimmt und zu einer neuen Farbe mischt. Wie viele Wahlmöglichkeiten gibt es? In welchem Verhältnis steht das Ergebnis zur Menge $P(\text{Primärfarben})$?

> 3. Wenn eine Menge $M$ 10 Elemente besitzt, wie viele Elemente besitzt dann die Potenzmenge $P(M)$?

Da für jede Menge $M$ gilt, dass $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$, sind unter den Teilmengen für $M$ immer die leere Menge und die Menge $M$ selbst. Für jede Menge $M$ gilt daher:

$$\emptyset \in P(M) \text{ und } M \in P(M).$$ [1]

Somit ergibt sich, dass die Potenzmenge der leeren Menge wie folgt aussieht:

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Das heißt, obwohl die leere Menge selbst keine Elemente enthält, ist die Potenzmenge dieser Menge nicht die leere Menge, sondern die Menge, welche die leere Menge als einziges Element enthält. Es gilt also, dass die Kardinalität der Potenzmenge der leeren Menge $|P(\emptyset)| = 1$ ist.

> **Aufgabe 1.7**
> Bestimmen Sie $P(\{\emptyset\})$. Wie sieht die Potenzmenge davon aus?

Die Potenzmengen der Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{\mathrm{Rot}, \mathrm{Gelb}, \mathrm{Blau}\}$ haben jeweils acht Elemente. Dies gilt für alle Mengen mit drei Elementen. Bei Mengen mit zwei Elementen besitzt die Potenzmenge vier Elemente, bei vierelementigen Mengen 16. Daraus kann der folgende Satz abgeleitet werden:

> **Satz 1.1**
> Besteht eine Menge $M$ aus genau $n$ Elementen, dann hat die Potenzmenge $P(M)$ genau $2^n$ Elemente, d. h. es gilt $|P(M)| = 2^{|M|}$.

<u>Hinweis</u>: Ein Beweis dieses Satzes benötigt das Wissen aus Kapitel 3. Daher wird an dieser Stelle auf einen Beweis verzichtet. Nach dem Bearbeiten des dritten Kapitels dürfen Sie sich gerne an dem Beweis probieren.

> **Aufgabe 1.8: Abschließende Aufgaben**
> 1. Für welche Mengen kann sowohl $M \in P(M)$ als auch $M \subseteq P(M)$ geschrieben werden?
> 2. Warum ist die Schreibweise $M \in P(M)$ korrekt, aber die Schreibweise $M \subseteq P(M)$ für $M \neq \emptyset$ nicht?
> 3. Sei $M = \{1\}$. Bilden Sie $P(P(M))$.

[1] Beachten Sie, dass hier $M \in P(M)$ gilt und nicht $M \subseteq P(M)$!

### 1.1.3 Operationen auf Mengen

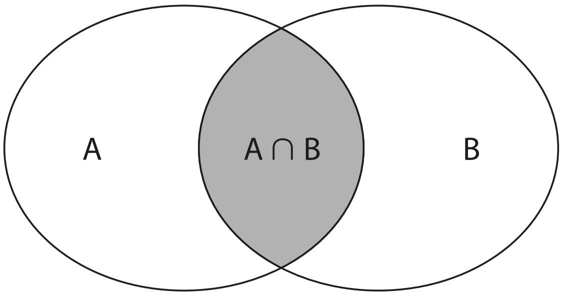
Aus zwei Mengen $A$ und $B$ können auf verschiedene Art und Weise neue Mengen gebildet werden. Diese Konstruktionsmethoden werden durch sogenannte *Mengenoperationen* beschrieben.
Eine dieser Mengenoperationen ist der *Durchschnitt*. Sie bestimmt zu gegebenen Mengen $A$ und $B$ die Menge, die aus den Elementen besteht, die sowohl in $A$ als auch in $B$ vorkommen. Die so gebildete Menge heißt *Schnittmenge* von $A$ und $B$.

**Definition 1.9: Durchschnitt zweier Mengen**
Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Dann ist der Durchschnitt definiert als:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

(gesprochen: $A$ geschnitten mit $B$)

Anhand eines Mengendiagramms für $A$ und $B$ lässt sich die entstehende Menge gut verdeutlichen. Sie besteht aus dem Teil, der beiden Mengen gemeinsam ist:




Es gilt also immer: $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$

Sowohl die Darstellung des Durchschnitts durch das Mengendiagramm als auch die Definition lassen erkennen, dass der Ausdruck $A \cap B$ dieselbe Menge darstellt wie der Ausdruck $B \cap A$. Die beiden Operanden der Operation $\cap$ lassen sich also vertauschen. Die Operation $\cap$ ist demnach *kommutativ*.

**Satz 1.2**
Für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt:

$$A \cap B = B \cap A$$

*Beweis.*
Sei $x \in A \cap B$. Dann gilt:
$x \in A$ und $x \in B$
Da bei einer „und“-Verknüpfung beide Aussagen erfüllt sein müssen, ist die Reihenfolge nicht relevant (siehe Kapitel 2). Es gilt also:
$x \in B$ und $x \in A$
Somit gilt: $x \in B \cap A$. □

**Beispiel 1.8**
Hier folgen nun einige Beispiele zur Bildung des Durchschnitts.

1. Für dieses Beispiel dienen die Mengen $M_3 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ und $M_4 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$ aus dem Beispiel 1.2 als Ausgangsmengen. Durch die Durchschnittsoperation entsteht die neue Menge
$$M_3 \cap M_4 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist eine gerade Quadratzahl}\}$$
2. Die beiden Mengen Finger = {Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger, Ringfinger, kleiner Finger} und $M_7 = \{\text{a, aa, aaa, aaaa}, \ldots\}$ aus dem Beispiel 1.3 besitzen kein gemeinsames Element. Dementsprechend ist ihr Durchschnitt leer, d. h.
$$\text{Finger} \cap M_7 = \emptyset.$$
Mengen ohne gemeinsames Element werden auch als *elementfremd* oder *disjunkt* bezeichnet.
3. Für die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Das heißt, dass alle Elemente von $\mathbb{N}$ auch Elemente von $\mathbb{Z}$ sind. Somit gilt für die Schnittmenge:
$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}.$$

Die Eigenschaften der Operation Durchschnitt lassen sich wie folgt zusammenfassen:

| | | |
|---|---|---|
| 1. Für alle Mengen $A, B$ gilt: | $A \cap B = B \cap A$ | (Kommutativgesetz) |
| 2. Falls $A \subseteq B$ gilt, dann ist: | $A \cap B = A$ | |
| 3. Für alle Mengen $A$ gilt: | $\emptyset \cap A = \emptyset$ | (Spezialfall von 2.) |
| 4. Für alle Mengen $A$ gilt: | $A \cap A = A$ | (Spezialfall von 2.) |
| 5. Für alle Mengen $A, B$ gilt: | $A \cap B \subseteq A$ | |
| 6. Für alle Mengen $A, B$ gilt: | $A \cap B \subseteq B$ | |

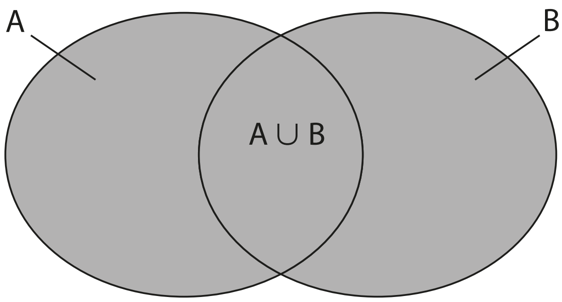
Eine weitere Operation ist die *Vereinigung* zweier Mengen $A$ und $B$. Diese Operation bildet eine neue Menge aus $A$ und $B$, indem sie jedes Element, das in mindestens einer der beiden Mengen vorkommt, in einer neuen Menge „vereinigt“. Die entstehende Menge heißt *Vereinigungsmenge*.

**Definition 1.10: Vereinigung zweier Mengen**
Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Dann ist die Vereinigung definiert als:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(gesprochen: $A$ vereinigt mit $B$)

Auch diese Menge lässt sich anhand eines Mengendiagramms für $A$ und $B$ anschaulich darstellen:




Es gilt: $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq B \cup A$.

Die Operation $\cup$ ist ebenfalls kommutativ. Das bedeutet, die Vereinigungsmenge zweier Mengen ist unabhängig von der Reihenfolge der Operanden.

**Satz 1.3**
Für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt:

$$A \cup B = B \cup A$$

**Aufgabe 1.9**
Beweisen Sie Satz 1.3. (Tipp: Sie können sich am Beweis zu Satz 1.2 orientieren.)

**Beispiel 1.9**
Es folgen nun zwei Beispiele zur Vereinigung zweier Mengen.

1. Sei $G$ die Menge der nicht negativen, geraden Zahlen, d. h.

$$G = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und es gibt ein } y \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } x = 2y\}$$

und sei $U$ die Menge der positiven, ungeraden Zahlen, d. h.

$$U = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und es gibt ein } y \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } x = 2y + 1\}.$$

Dann gilt: $G \cup U = \mathbb{N}_0$.

2. Für die Mengen $\{1, 2\}$ und $\{1\}$ ergibt die Vereinigung $\{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$. Da das Ergebnis der Vereinigung wieder eine Menge ist, werden doppelt vorkommende Elemente nur einmal in die Vereinigungsmenge aufgenommen. Bei der Vereinigung einer Menge $M$ mit einer ihrer Teilmengen entsteht also wieder die Menge $M$.

Die Eigenschaften der Operation Vereinigung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

| | | |
|---|---|---|
| 1. Für alle Mengen $A, B$ gilt: | $A \cup B = B \cup A$ | (Kommutativgesetz) |
| 2. Falls $A \subseteq B$ gilt, dann ist: | $A \cup B = B$ | |
| 3. Für alle Mengen $A$ gilt: | $\emptyset \cup A = A$ | (Spezialfall von 2.) |
| 4. Für alle Mengen $A$ gilt: | $A \cup A = A$ | (Spezialfall von 2.) |
| 5. Für alle Mengen $A, B$ gilt: | $A \subseteq A \cup B$ | und |
| | $B \subseteq A \cup B$ | |
| 6. Für endliche Mengen $A, B$ gilt: | $\lvert A \cup B\rvert =$ | |
| | $\lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$ | |

Entsteht eine Menge $M$ durch die Vereinigung von mehreren Mengen $M_i$ mit $i$ aus einer Indexmenge $I$, so wird für die Beschreibung dieser Operation oft nur ein (größeres) Vereinigungssymbol, an welches die Indexmenge geschrieben wird, verwendet.
Der Ausdruck für $M$ lautet dann:

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

Dasselbe gilt, falls $M$ durch die Durchschnittsbildung über die Mengen $M_i$ entsteht:

$$M = \bigcap_{i \in I} M_i$$

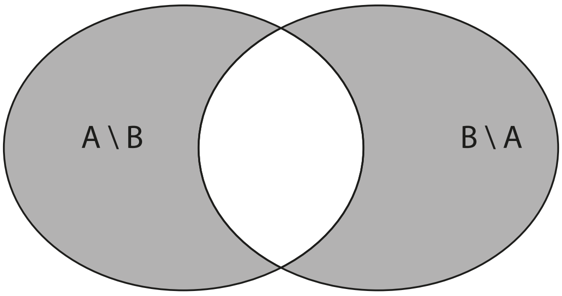
Die *Differenz* der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Elementen der Menge $A$, die nicht in $B$ enthalten sind.

**Definition 1.11: Differenz zweier Mengen**
Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Dann ist die Differenz definiert als:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

(gesprochen: $A$ ohne $B$)[2]

Das Mengendiagramm dazu sieht wie folgt aus:




Es gilt: $A \setminus B \subseteq A$

**Beispiel 1.10**
Seien die Mengen $A$ und $B$ wie folgt definiert:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \text{ ist Primzahl}\}$$
$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \text{ ist ungerade}\}$$

Dann ist

$$A \setminus B = \{2\}$$
$$B \setminus A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \text{ ist ungerade und } x \text{ ist keine Primzahl}\}$$

Dieses Beispiel und die grafische Darstellung belegen, dass normalerweise die Ausdrücke $A \setminus B$ und $B \setminus A$ unterschiedliche Mengen darstellen. Das bedeutet, dass die Operation der Differenz der Mengen nicht kommutativ ist. Dies wird auch im folgenden Beispiel deutlich:

**Beispiel 1.11**
Gegeben seien die Mengen Primärfarbe und Sekundärfarbe wie folgt:

$$\text{Primärfarbe} = \{\text{Rot, Gelb, Blau}\}$$
$$\text{Sekundärfarbe} = \{\text{Orange, Grün, Lila}\}$$

[2] Für die Differenz $A \setminus B$ ist auch die Schreibweise $A - B$ geläufig.

Für die beiden Mengendifferenzen gilt nun:

$$\text{Primärfarbe} \setminus \text{Sekundärfarbe} = \{\text{Rot, Gelb, Blau}\}$$
$$\text{Sekundärfarbe} \setminus \text{Primärfarbe} = \{\text{Orange, Grün, Lila}\}$$

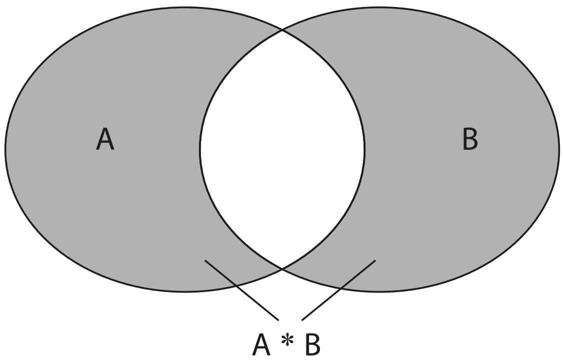
In dem Beispiel 1.11 wird auch deutlich, dass $A \setminus B = A$ ist, falls $A$ und $B$ disjunkt sind.

Eine weitere Mengenoperation ist die *symmetrische Differenz*, die mit dem Ausdruck $A * B$ bezeichnet wird. Sie entsteht aus der Vereinigung der beiden Differenzmengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

**Definition 1.12: Symmetrische Differenz zweier Mengen**
Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Dann ist die symmetrische Differenz definiert als:

$$A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dies sieht in einem Mengendiagramm wie folgt aus:




Anhand des Diagramms lässt sich erkennen, dass auch $A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ gilt. Ebenfalls lässt sich erkennen, dass die symmetrische Differenz kommutativ ist.

**Satz 1.4**
Die symmetrische Differenz zweier Mengen ist kommutativ, d. h.

$$A * B = B * A$$

**Aufgabe 1.10**
Beweisen Sie Satz 1.4.

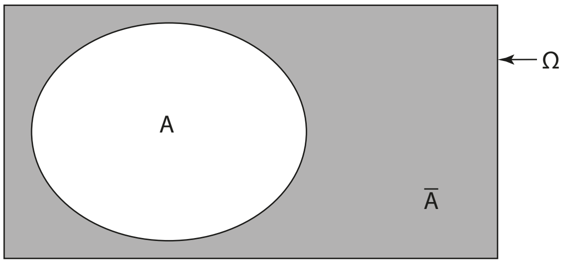
Eine besondere Art der Operation Differenz wird betrachtet, wenn in einer für alle Mengen übergreifenden Obermenge $\Omega$, auch *Universum* genannt, gerechnet wird. Für eine Menge $A$ heißt die Differenz $\Omega \setminus A$ das Komplement von $A$ (in $\Omega$).

**Definition 1.13: Komplement einer Menge**
Sei $A$ eine Menge und $\Omega$ die dazugehörige Obermenge. Dann ist das Komplement von $A$ definiert als

$$C_\Omega(A) = \Omega \setminus A.$$

Ist das Universum eindeutig, wird anstatt $C_\Omega(A)$ auch $\overline{A}$ verwendet (gesprochen: $A$ quer).

Im Mengendiagramm wird $\Omega$ aufgrund der besonderen Rolle als Universum durch eine rechteckige Form dargestellt. Ansonsten ergibt sich dasselbe Diagramm wie bei der Differenz:




Mengen, die häufig als Universum auftreten, sind beispielsweise $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

**Beispiel 1.12**
Das Komplement der Menge $G$ der geraden Zahlen in $\mathbb{N}_0$ ist die Menge $U$ der ungeraden natürlichen Zahlen:

$$C_{\mathbb{N}_0}(G) = U.$$

Wird dieselbe Menge $G$ (die Menge der natürlichen geraden Zahlen) im Universum der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ betrachtet, so ergibt sich

$$C_{\mathbb{Z}}(G) = U \cup \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } x < 0\}$$

Wie schon in der Definition 1.13 erwähnt, kann bei einem festen Universum, z. B. $\mathbb{N}_0$, für das Komplement einer Menge $A$ die alternative Bezeichnungsweise $\overline{A}$ verwendet werden. Das Komplement der Menge $Q$ der Quadratzahlen kann dann wie folgt angegeben werden:

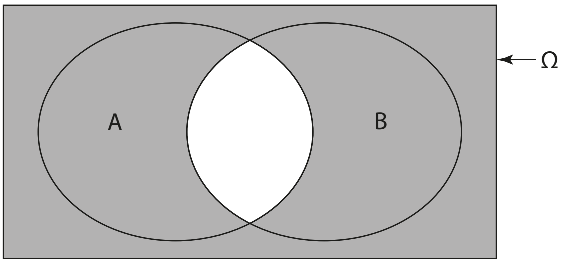
$$\overline{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \text{ ist keine Quadratzahl}\}.$$

Das Zusammenspiel der Operationen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement beschreiben die Gesetze von De Morgan.

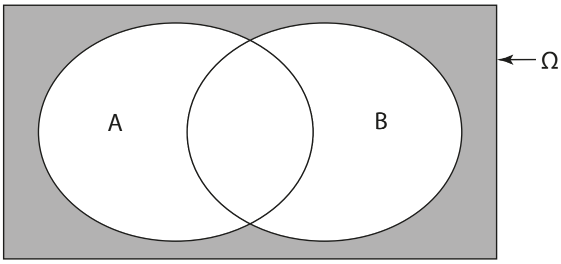
**Satz 1.5: De Morgansche Gesetze**
Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Dann gilt:

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Die Gültigkeit dieser Formeln wird in den folgenden Mengendiagrammen verdeutlicht.




$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$




$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

**Aufgabe 1.11: Abschließende Aufgaben**

1. Wodurch begründet sich die Formel für die Kardinalität der Vereinigungsmenge?
2. Wie ergibt sich das Komplement der Vereinigungsmenge von $U$, der Menge der ungeraden Zahlen und der Menge $Q$ der Quadratzahlen in $\mathbb{N}_0$ mit Hilfe der Gesetze von De Morgan?
3. Beweisen Sie die Gesetze von De Morgan (Satz 1.5).

## 1.2 Relationen

### 1.2.1 Was ist eine Relation?

Eine häufige Aufgabe in der Mathematik und der Informatik beinhaltet, dass für einzelne Objekte verschiedene „Eigenschaften“oder Werte verarbeitet werden sollen. So könnte z. B. bei der Realisierung einer Studierendenkartei die Aufgabe bestehen, für die Studierenden das aktuelle Studiensemester abzuspeichern. Aus